MATEMÁTICAS

LÍMITES

LÍMITES

INDETERMINACIONES

$\frac{\infty}{\infty}$ Esta indeterminación se resuelve siempre dividiendo numerador y denominador por el término de mayor grado.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-5x+6}{3x^3-2x+5}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{6}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{3-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}=\frac{1+\frac{2}{\infty}-\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty}}{3-\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty}}=$$

$$=\frac{1+0-0+0}{3-0+0}=\frac{1}{3}$$

REGLA: Cuando resolvemos indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ se cumple:

- Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador el resultado del límite es ∞.
- Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador el resultado del límite es 0.
- Si el grado del numerador es igual que el grado del denominador el resultado del límite son los coeficientes de los términos de mayor grado.

$\infty-\infty$ Hay dos tipos de límites que pueden presentar esta indeterminación

1.-Cuando hay una diferencia de dos cocientes de polinomios, donde cada cociente por separado tiene de límite infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-3x}{x+5}-\frac{3x^3+2}{x^2+2x-1}\right)=\infty-\infty\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2-3x).(x^2+2x-1)-(3x^3+2).(x+5)}{(x+5).(x^2+2x-1)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+4x^3-2x^2-3x^3-6x^2+3x-3x^4-15x^3-2x-10}{x^3+2x^2-x+5x^2+10x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^4-11x^3-8x^2+x-10}{x^3+7x^2+9x-5}=$$

$$=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow-\infty$$

En el resultado del límite anteriormente resuelto, como se puede ver, el grado del numerador es mayor que el del denominador, por lo tanto el límite es infinito, además el término de mayor grado tiene coeficiente negativo por lo cual el límite será menos infinito.

2.- Cuando hay una diferencia de dos raíces, donde cada una de ellas tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x}-\sqrt{3x^2+4}\right)=\infty-\infty\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-3x}-\sqrt{3x^2+4}\right)\left(\sqrt{2x^2-3x}+\sqrt{3x^2+4}\right)}{\left(\sqrt{2x^2-3x}+\sqrt{3x^2+4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2-3x}\right)^2-\left(\sqrt{3x^2+4}\right)^2}{\sqrt{2x^2-3x}+\sqrt{3x^2+4}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-3x^2-4}{\sqrt{2x^2-3x}+\sqrt{3x^2+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2-3x-4}{\sqrt{2x^2-3x}+\sqrt{3x^2+4}}\ \frac{\infty}{\infty}\Rightarrow-\infty$$

En el resultado del límite anteriormente resuelto, como se puede ver, el grado del numerador es mayor que el del denominador, (aunque el denominador tiene exponente cuadrado está dentro de una raíz, por tanto, es como si fuera de exponente lineal) , por lo tanto el límite es infinito, además el término de mayor grado tiene coeficiente negativo por lo cual el límite será menos infinito.

$\frac{0}{0}$ Hay dos tipos de límites que pueden presentar esta indeterminación.

1.- Cociente de polinomios que se pueden descomponer en producto de factores

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{x-3}{x+2}=\frac{2-3}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

2.- Cociente donde numerador ó denominador ó ambos tengan raíces que den como resultado 0.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\left[\left(\sqrt{2x+2}\right)^2-\left(\sqrt{3x+1}\right)^2\right]\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)}{\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x}\right)^2\right]\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+1}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{(2x+2-3x-1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)}{(x+1-2x)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(-x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}\right)}{(-x+1)\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+1}\right)}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+2}+\sqrt{3x+1}}=\frac{\sqrt{1+1}+\sqrt{2.1}}{\sqrt{2.1+2}+\sqrt{3.1+1}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

1^{∞} Son límites también llamados del número “e”.

Hay dos formas de resolverlos, una se trata de emplear una fórmula y después resolver el límite.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-2}\right)^{3x-1}=1^{\infty}\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to\infty}(exponente).(base-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x-1)\left(\frac{2x+3}{2x-2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\left(\frac{2x+3-2x+2}{2x-2}\right)}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1)\left(\frac{5}{2x-2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5.(3x+1)}{2x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x+5}{2x-2}}=e^{\frac{15}{2}}$$

La otra forma se trata de llegar a la expresión que determina el número “e”, es decir $\left(1+\frac{1}{\mathrm{A}}\right)^{\mathrm{A}}=$ e. La dificultad está exclusivamente en tratar de encontrar esa expresión A.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-2}\right)^{3x-1}=1^{\infty}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3}{2x-2}-1\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3-2x+2}{2x-2}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{2x-2}\right)^{3x-1}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{5}}\right)^{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{5}}\right)^{\frac{2x-2}{5}.\frac{5}{2x-2}.(3x-1)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{5}}\right)^{\frac{2x-2}{5}}\right]^{\frac{5.(3x-1)}{2x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5(3x-1)}{2x-2}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{15x-5}{2x-2}}=e^{\frac{15}{2}}$$

Para conseguir esa expresión del numero e necesitamos tener un 1, como no lo tenemos, lo ponemos y para que la expresión no varíe, lo quitamos. Arreglamos la expresión. Después necesitamos tener un 1 en el numerador, para ello pasamos ese numerador al denominador del denominador, con lo que la expresión tampoco varía. Por último necesitamos tener la expresión del denominador (que en la fórmula llamamos A) en el exponente, como no la tenemos, la ponemos y para que la expresión no varíe la quitamos. Ya tenemos el número e, y calculamos el límite de la expresión restante.