MATEMÁTICAS

DERIVADAS

DERIVADAS

Conocemos el concepto de derivada en un punto como el límite de la tasa de variación media, por este motivo, antes de nada vamos a intentar explicar lo que es la tasa de variación media.

TASA DE VARIACIÓN MEDIA – TASA DE VARIACIÓN INSTANTANEA

La tasa de variación media es lo que varía la variable dependiente a medida que varía la variable independiente. Es decir:

$$t_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow En\ un\ intervalo[a,b] \Rightarrow t_m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si estudiamos la tasa de variación media en un periodo de tiempo cada vez más pequeño, es decir, que se aproxime a cero, conseguiremos la tasa de variación instantánea.

$$t_i = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La tasa de variación instantánea es la derivada.
Esta expresión, cuando se restringe a un punto determinado en el que x=a, deja de ser tasa de variación instantánea, para convertirse en la derivada de la función en un punto. La derivada de la función en un punto es un número real. Es decir, que se considera que la función es derivable en un punto a, cuando el límite existe.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

También hay que tener en cuenta que las funciones algunas veces están definidas a trozos, en estos casos las derivadas laterales en ese punto deben de ser iguales para considerar que la función es derivable.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Geométricamente hablando, la recta tangente a una curva en un punto determinado se puede conseguir mediante derivadas.
Para esto debemos de tener en cuenta que cuando estudiamos las ecuaciones de la recta, una de las formas de expresarla era la forma: punto-pendiente, que como recordareis era:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

En una curva cualquiera sabemos que la pendiente es:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Si consideramos que los puntos son: $P = (x_1, y_1); Q = (x_2, y_2)$

Si hacemos variar los puntos de forma que consideremos la pendiente entre el punto P (a, f(a)) y un punto cualquiera P_i (x_i, f(x_i)) la pendiente se convertiría en:

$m = \dfrac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a}$ y si finalmente hacemos que el punto P_i se aproxime todo lo posible al punto P, conseguiríamos: $m = \lim\limits_{x_i \to a} \dfrac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a}$ si os fijáis esta es la definición de derivada en un punto, por tanto acabamos de demostrar que la pendiente a una curva en un punto determinado es la derivada de dicha función en ese punto.

Por tanto la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto se convierte en $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

DERIVADAS DE FUNCIONES

Para derivar funciones seguiremos ciertas reglas, estas son:

$$y = k \Rightarrow y' = 0$$

$$y = x \Rightarrow y' = 1 \ldots\ldots\ldots y = f + g \Rightarrow y' = f' + g'$$

$$y = f.g \Rightarrow y' = f'.g + g'.f$$

$$y = \frac{f}{g} \Rightarrow y' = \frac{f'.g - g'.f}{g^2}$$

$$y = f^n \Rightarrow y' = n.f^{n-1}.f'$$

$$y = \sqrt{f} \Rightarrow y' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$y = \sqrt[n]{f} \Rightarrow y' = \frac{f'}{n.\sqrt[n]{f^{n-1}}}$$

$$y = Lf \Rightarrow y' = \frac{f'}{f}$$

$$y = \log_a f \Rightarrow y' = \frac{f'}{f}\log_a e$$

$$y = e^f \Rightarrow y' = e^f.f'$$

$$y = a^f \Rightarrow y' = a^f.f'.La$$

$$y = \operatorname{sen} f \Rightarrow y' = \cos f.f'$$

$$y = \cos f \Rightarrow y' = -\operatorname{sen} f.f'$$

$$y = \operatorname{tg} f \Rightarrow y' = \sec^2 f.f' = \frac{f'}{\cos^2 f}$$

$$y = \operatorname{cotg} f \Rightarrow y' = -\csc^2 f.f' = \frac{-f'}{\operatorname{sen}^2 f}$$

$$y = \operatorname{arcsen} f \Rightarrow y' = \frac{f'}{\sqrt{1 - f^2}}$$

$$y = \arccos f \Rightarrow y' = \frac{-f'}{\sqrt{1 - f^2}}$$

$$y = \operatorname{arctg} f \Rightarrow y' = \frac{f'}{1 + f^2}$$

Para derivar es necesario ante todo mirar que tipo de función estas tratando y después aplicar la fórmula correspondiente.
Ejemplo:

$$y = \sqrt{L(tg(x^2+1))}$$

$$y' = \frac{\left[L(tg(x^2+1))\right]'}{2\sqrt{L(tg(x^2+1))}} = \frac{\frac{\left[tg(x^2+1)\right]'}{tg(x^2+1)}}{2\sqrt{L(tg(x^2+1))}} = \frac{\frac{\sec^2(x^2+1)\cdot(x^2+1)'}{tg(x^2+1)}}{2\sqrt{L(tg(x^2+1))}} = \frac{\frac{\sec^2(x^2+1)\cdot 2x\cdot 1}{tg(x^2+1)}}{2\sqrt{L(tg(x^2+1))}}$$

Como se puede ver tenemos en primer lugar una función "raíz" buscamos por lo tanto esta función en la tabla de derivadas y comprobamos que es $y = \sqrt{f} \Rightarrow y' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$ en este caso particular nuestra f=$L(tg(x^2+1))$. Cuando vamos a hacer f'comprobamos que es una función logaritmo neperiano, buscamos por lo tanto esta función en la tabla de derivadas y comprobamos que es $y = Lf \Rightarrow y' = \frac{f'}{f}$ en este caso particular nuestra $f = tg(x^2+1)$. Cuando vamos a hacer f'nos encontramos que es una función tangente, buscamos en la tabla de derivadas y comprobamos que es $y = tg\, f \Rightarrow y' = \sec^2 f \cdot f'$en este caso particular nuestra f=(x^2+1), buscamos en la tabla la función suma y vemos que es la derivada de cada sumando, el primer sumando es una potencia en la tabla encontramos que $y = f^n \Rightarrow y' = n\cdot f^{n-1}\cdot f'$; finalmente nuestra f en este caso es x y como sabemos su derivada es 1. Con esto estaría la derivada resuelta.

<u>DERIVADAS LATERALES</u>

Para hacer las derivadas laterales hacemos exactamente igual que para hacer la derivada de una función única, haremos las derivadas por la derecha y la izquierda del punto que estemos tratando. Si estas derivadas coinciden, consideramos que la función es derivable. Como condición tendremos que tener en cuenta que una función para ser derivable debe de ser antes continua.
Sin embargo una función continua no tiene que ser obligatoriamente derivable.