MATEMÁTICAS

NÚMEROS COMPLEJOS

NÚMEROS COMPLEJOS

DEFINICIÓN

Se llama número complejo a un par ordenado de números reales (a, b).

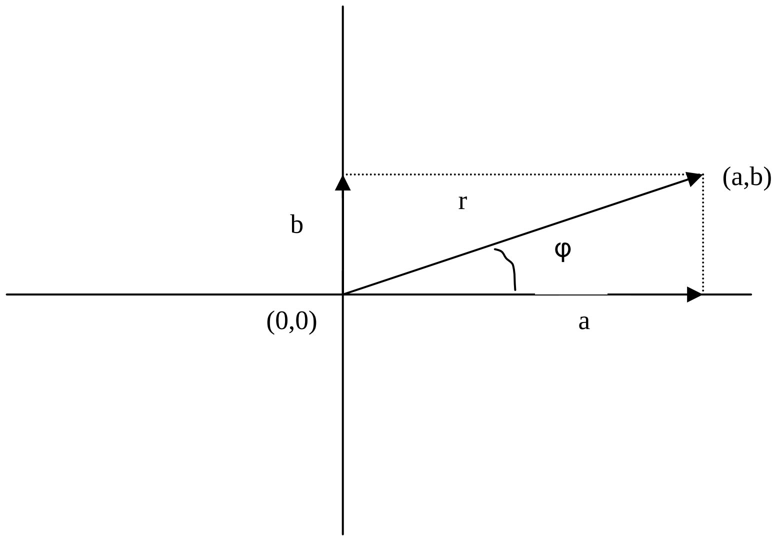
Los números reales a y b se llaman componentes del número complejo. A la componente “a” se le designa parte real y a la componente “b” se le designa parte imaginaria.

El número complejo se inicia como tal por la necesidad que tenemos de añadir ciertos números a los ya conocidos. Esta necesidad es la de considerar que como no existe la raíz cuadrada de un número negativo tenemos que buscar una forma de expresar dicho número. Por este motivo a la raíz cuadrada de “-1”
se le llama “i “.

AFIJO Y MÓDULO DE UN COMPLEJO

Escogiendo unos ejes cartesianos vamos a representar un número complejo (a,b) como un vector del plano, cuyo origen sea el punto (0,0), el origen de coordenadas, y cuyo extremo sea el punto N de coordenadas (a, b).

El vector así representado define un número complejo, y a dicha representación se le llama afijo de un número complejo.



Como se ve en el dibujo “r” es el módulo del vector.
Aplicando en el vector representado en la figura la descomposición del vector “r” tendremos:

a=r.cosφ
b=r.senφ
Esta descomposición indica el paso de coordenadas cartesianas a polares y viceversa.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{b}{a} \Rightarrow \varphi = \arctan\frac{b}{a}$$

El número complejo z se puede por tanto expresar de las siguientes formas:

Cartesiana: (a, b)
Binómica: a + b i.
Polar: r_φ
Trigonométrica: r (cos φ+ i sen φ)

Ejemplo: Vamos a pasar a forma polar el número complejo 3-3i. Para ello lo primero calcularíamos el módulo del número complejo, y después el argumento, teniendo en cuenta para el argumento el cuadrante en el que se encuentra el número complejo que estemos tratando.

$$r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$$

$$\varphi = arctg\,\frac{b}{a} = arctg\,\frac{-3}{3} = 315^{o}$$

Como se puede ver a la hora de buscar el argumento (ángulo) hay que tener en cuenta el cuadrante donde esta situado el número complejo, ya que al buscar el cociente b/a en la calculadora, esta no tiene en cuenta todos los cuadrantes, es decir si da negativo la calculadora supone que es del 4º cuadrante aunque también pueda ser del 2º, y si da positivo tiene en cuenta que es del 1^{er} cuadrante aunque también pueda ser del 3º.

Por tanto para evitar errores podemos hacer el cociente b/a como si no tuviera signo (aunque si lo tenga), calcular el ángulo que nos daría en el primer cuadrante y después pasarlo al cuadrante correspondiente, teniendo en cuenta el signo de las partes reales e imaginarias.

Para saber el cuadrante al que pertenece un número complejo se tiene en cuenta su afijo (representación gráfica):

- 1^{er} cuadrante.- parte real positiva, parte imaginaria positiva.
- 2º cuadrante.- parte real negativa, parte imaginaria positiva.
- 3^{er} cuadrante.- parte real negativa, parte imaginaria negativa.
- 4º cuadrante.- parte real positiva, parte imaginaria negativa.

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

SUMA Y RESTA

Para sumar y restar números complejos de forma binómica basta con sumar o restar la parte real con la real y la imaginaria con la imaginaria.

Ej: (2+5i) + (3-2i) = [(2+3) + (5+(-2))i]= 7+3i
(2+5i) - (3-2i) = [(2-3) + (5-(-2))i]= -1+7i

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar números complejos de forma binómica se trabaja como para multiplicar cualquier binomio.

(2+5i) . (3-2i) =2.3+2.(-2i)+(5i).3+(5i).(-2i)= 6-4i+15i-10i^2 = 6-4i+15i-10(-1)=
6-4i+15i+10=16+11i

Como se puede comprobar se sustituye la expresión i^2 por “-1” ya que $i = \sqrt{-1}$.

DIVISIÓN

Para dividir números complejos de la forma binómica se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{2+5i}{3-2i} = \frac{(2+5i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{2\cdot 3 + 2\cdot 2i + 5i\cdot 3 + 5i\cdot 2i}{3^2 - (2i)^2} = \frac{6+4i+15i+10i^2}{9-4i^2} = \frac{6+19i+10\cdot(-1)}{9-4(-1)} = \frac{6+19i-10}{9+4} =$$

$$\frac{-4+19i}{13} = \frac{-4}{13} + \frac{19}{13}i$$

POTENCIACIÓN

Para hacer la potencia de un número complejo tenemos que considerar que es multiplicar lo mismo varias veces (según cual sea el exponente), por ese motivo cuando el número complejo está elevado al cuadrado o al cubo podemos resolverlo como el cuadrado o el cubo de un binomio, pero cuando es una potencia elevada solo sería realizable utilizando el binomio de Newton. Como esto resulta muy trabajoso, es preferible resolver esta potencia pasando previamente a forma polar, esto nos simplificará mucho el trabajo.

Antes de explicar como se realiza la potenciación de números complejos vamos a ver las potencias del número complejo “i”.

$$i = \sqrt{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 . i = (-1). i = -i$$
$$i^4 = i^2 . i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 . i = 1. i = i$$

....

$$i^{10} = i^4 . i^4 = 1.1 = 1$$
$$i^{135} = i^{4.33+3} = i^{4.33} . i^3 = (-1)^{33} . i^3 = 1.(-i) = -i$$
$$i^n = i^{4.c+r} = i^{4c} . i^r = 1. i^r = i^r$$

Donde “c” es el cociente y “r” el resto.

Si lo que vamos a multiplicar son dos números complejos con parte real e imaginaria, tenemos que multiplicarlo como si se tratara de binomios. Ej:

$$(2-3i)^2 = (2-3i).(2-3i) = 4-6i-6i+9i^2 = 4-12i-9 = -5-12i$$

Si la potencia es mayor se puede resolver incluso por el binomio de Newton.

$$(2-3i)^5 = \binom{5}{0}.2^5.(3i)^0 - \binom{5}{1}.2^4.(3i)^1 + \binom{5}{2}.2^3.(3i)^2 - \binom{5}{3}.2^2.(3i)^3 + \binom{5}{4}.2^1.(3i)^4 - \binom{5}{5}.2^0.(3i)^5 =$$

$$= 1.32.1 - 5.16.3i + 10.8.9i^2 - 10.4.27i^3 + 5.2.81i^4 - 1.1.243i^5 = 32 - 240i + 720i^2 -$$

$$-1080i^3 + 810i^4 - 243i^5 = 32 - 240i - 720 + 1080i + 810 - 243i = 122 + 1077i$$

De todas formas el resolver la potenciación de forma binómico es muy laborioso, por tanto lo resolveremos pasando a forma polar, como veremos más adelante.

RADICACIÓN

La radicación de forma binómica es muy complicada y requiere muchas operaciones, de todas formas vamos a hacer un ejemplo de cómo se podría resolver.
Ej:

$$\sqrt{5-2i} = a + bi \quad \textit{elevamos los dos miembros al cuadrado.}$$

$$\left(\sqrt{5-2i}\right)^2 = (a+bi)^2$$

$$5-2i = a^2 + 2abi + (bi)^2$$

$$5-2i = a^2 + 2abi + b^2 i^2$$

$$5-2i = a^2 + 2abi + b^2(-1)$$

$$5-2i = \left(a^2 - b^2\right) + 2abi$$

Igulamos la parte real con la real y la imaginaria con la imaginaria

$$\begin{cases} 5 = a^2 - b^2 \\ -2 = 2ab \end{cases}$$

Re*solvemos el sistema.*

$$Si\ a = -2{,}29 \Rightarrow b = 0{,}43$$

$$Si\ a = 2{,}29 \Rightarrow b = -0{,}43$$

$$Por\ \tan to\ la\ raíz\ tendrá\ dos\ soluciones: \begin{cases} -2{,}29 + 0{,}43i \\ 2{,}29 - 0{,}43i \end{cases}$$

Como se puede ver es muy laborioso aún teniendo en cuenta que hicimos la raíz más sencilla, que es la cuadrada, por ese motivo se solucionarán las radicaciones con la forma polar.

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

SUMA Y RESTA

Nunca se hacen en forma polar.

MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar números complejos en forma polar, multiplicamos los módulos y sumamos los argumentos.

Ej:

$$r_{\varphi} \cdot r_{\vartheta}' = (r \cdot r')_{\varphi+\vartheta}$$
$$3_{30} \cdot 5_{45} = (3 \cdot 5)_{30+45} = 15_{75}$$

DIVISIÓN

Para dividir números complejos en forma polar, dividimos los módulos y restamos los argumentos.

Ej:

$$\frac{3_{30}}{5_{45}} = \left(\frac{3}{5}\right)_{30-45} = \left(\frac{3}{5}\right)_{-15}$$

POTENCIACIÓN

La potenciación no deja de ser una multiplicación sucesiva, por tanto elevamos el módulo a la potencia y multiplicamos el argumento por dicha potencia.

Ej:

$$(5_{30})^8 = (5)^8_{30\cdot 8} = (5)^8_{240} = 390625_{240}$$

RADICACIÓN

Para hacer raíces tenemos que hacer lo siguiente:

- Se hace la raíz del módulo
- Se suma al argumento 360k, esto es para indicar las vueltas que puede dar en la circunferencia
- Todo esto se divide por el índice de la raíz

Las soluciones de estas operaciones serán tantas como el índice de la raíz, ya que a la k se le dan, empezando desde cero, tantos valores como indica el índice de la raíz.
Si representamos esas soluciones en unos ejes se nos forma un polígono de tantos lados como nos indique el índice de la raíz. Es decir si la raíz es quinta será un pentágono, si es cuatro será un cuadrado,…

$$\sqrt[6]{5_{30}} = \sqrt[6]{5}_{\frac{30+360k}{6}} = \begin{cases} k=0 \Rightarrow \sqrt[6]{5}_{\frac{30}{6}} = \sqrt[6]{5}_{5} \\ k=1 \Rightarrow \sqrt[6]{5}_{\frac{30+360}{6}} = \sqrt[6]{5}_{\frac{390}{6}} = \sqrt[6]{5}_{65} \\ k=2 \Rightarrow \sqrt[6]{5}_{\frac{30+720}{6}} = \sqrt[6]{5}_{\frac{750}{6}} = \sqrt[6]{5}_{125} \\ k=3 \Rightarrow \sqrt[6]{5}_{\frac{30+1080}{6}} = \sqrt[6]{5}_{\frac{1110}{6}} = \sqrt[6]{5}_{185} \\ k=4 \Rightarrow \sqrt[6]{5}_{\frac{30+1440}{6}} = \sqrt[6]{5}_{\frac{1430}{6}} = \sqrt[6]{5}_{245} \\ k=5 \Rightarrow \sqrt[6]{5}_{\frac{30+1800}{6}} = \sqrt[6]{5}_{\frac{1830}{6}} = \sqrt[6]{5}_{305} \end{cases}$$

Se puede ver que como es una raíz sexta, tiene seis soluciones que se colocarán en los ejes formando un hexágono regular. También podemos comprobar que el resultado está bien restando los ángulos finales y comprobando que nos da siempre el mismo resultado, es decir:

305-245=60
245-185=60
185-125=60
125-65=60
65-5=60

A la representación gráfica de un número complejo se le llama fijo.