Educaguía.com

MATEMÁTICAS

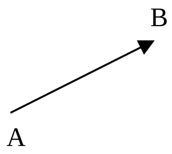
VECTORES

VECTORES

En este apartado vamos a trabajar exclusivamente con los vectores en el espacio a los que vamos a llamar F^3.

VECTOR FIJO

Lo primero tendremos que saber que es un vector. Así que llamamos vector fijo $\overrightarrow{AB}$ a un vector que tiene de origen el punto A y de extremo el B.



El vector queda determinado por:

- un módulo, es decir, su medida
- una dirección, que vendrá determinada por la recta que se apoye sobre ese vector
- un sentido, determinado por el recorrido desde A hasta B.

Según esto dos vectores que tengan el mismo módulo, dirección y sentido pero que estén apoyados sobre puntos distintos los podemos llamar equipolentes.

VECTOR LIBRE

Todos los vectores que consideramos equipolentes se pueden agrupar en un conjunto, este conjunto tiene un representante que vamos a suponer que es $\overrightarrow{AB}$ y que vamos a llamar vector libre.

ESPACIO VECTORIAL

Si antes llamamos a los vectores fijos del espacio F^3, ahora vamos a llamar a todos los vectores libres del espacio V^3, cuando a este conjunto le aplicamos dos operaciones:

- Una interna + (adición).
- Una externa *R (multiplicación por números reales)

Se dice que (V^3,+,*R) tiene estructura de espacio vectorial.
Para sumar dos vectores es suficiente con sumar las coordenadas (de la misma dirección) correspondientes a esos vectores.
Para multiplicar un vector por un número real, es suficiente con multiplicar cada coordenada por ese número real.

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

Consideramos base de un espacio vectorial cuando un conjunto de vectores decimos que son:

- Linealmente independientes.
- Sistema de generadores (es decir, que los vectores generan vectores que pertenecen a ese espacio vectorial).

Ej: Comprobar si los vectores (1,3,-2); (-2,1,1); y (0,2,1) son linealmente independientes.

$$a\cdot(1,3,-2)+b\cdot(-2,1,1)+c\cdot(0,2,1)=(0,0,0)$$
$$(a,3a,-2a)+(-2b,b,b)+(0,2c,c)=(0,0,0)$$
$$(a-2b,\ 3a+b+2c\ ,-2a+b+c)=(0,0,0)\Rightarrow\begin{cases}a-2b=0\\3a+b+2c=0\\-2a+b+c=0\end{cases}$$
$$a=0;\ b=0;\ c=0\Rightarrow$$

Como a=b=c=0 los vectores son linealmente independientes. Si alguno de los parámetros fuera distinto de cero, serían linealmente dependientes.
Ahora vamos a ver que estos tres vectores pueden generar otro vector:

$$a\cdot(1,3,-2)+b\cdot(-2,1,1)+c\cdot(0,2,1)=(2,4,5)$$
$$(a,3a,-2a)+(-2b,b,b)+(0,2c,c)=(2,4,5)$$
$$(a-2b,\ 3a+b+2c\ ,-2a+b+c)=(2,4,5)\Rightarrow\begin{cases}a-2b=2\\3a+b+2c=4\\-2a+b+c=5\end{cases}$$
$$a=\frac{-4}{13};\ b=\frac{-20}{13};\ c=\frac{57}{13}\Rightarrow$$

Efectivamente si a, b, y c toman unos valores determinados pueden generar otro vector perteneciente al mismo espacio vectorial.

<u>PRODUCTO ESCALAR</u>

El producto escalar de dos vectores viene determinado por un número, para calcularlo aplicaremos la fórmula:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$$
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}\\ \vec{v}=x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}+z'\,\vec{k}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=x\cdot x'+y\cdot y'+z\cdot z'$$
$$|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$|\vec{v}|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$
$$\cos(\vec{u},\vec{v})\Rightarrow\text{ángulo formado por los vectores }\vec{u}\text{ y }\vec{v}.\Rightarrow\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{x\cdot x'+y\cdot y'+z\cdot z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Ej: Sea $\vec{u}=(1,2,2)$ y $\vec{v}=(3,-2,1)$ vamos a calcular: su producto escalar, el módulo de cada vector y el ángulo que forman dichos vectores.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=1\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+1\vec{k}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot3+2\cdot(-2)+2\cdot1=3-4+2=1$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{3^2+(-2)^2+1}=\sqrt{14}$$

$$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{x\cdot x'+y\cdot y'+z\cdot z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\Rightarrow\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{1}{3\cdot\sqrt{14}}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=\arccos\frac{1}{3\cdot\sqrt{14}}=84^\circ53'20''$$

PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial de dos vectores viene determinado por:
El producto vectorial, al contrario que el escalar, viene determinado por un vector. Para calcularlo aplicaremos la fórmula:

$$\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v})$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}\\ \vec{v}=x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}+z'\,\vec{k}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ x&y&z\\ x'&y'&z'\end{vmatrix}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$$

$$\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v})\Rightarrow\text{ángulo formado por los vectores }\vec{u}\text{ y }\vec{v}.\Rightarrow\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v})=\frac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Por supuesto el determinante anterior se podría resolver con la regla de Sarrus.
Hay que tener en cuenta que el producto vectorial de dos vectores, tomado en valor absoluto equivale al área del paralelogramo generado por dichos vectores.
Ej: Sea $\vec{u}=(1,2,2)$ y $\vec{v}=(3,-2,1)$ vamos a calcular: su producto vectorial.

$$\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v})$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=1\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\\ \vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+1\vec{k}\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&2&2\\ 3&-2&1\end{vmatrix}=2\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}-6\vec{k}-\vec{j}+4\vec{i}=6\vec{i}+5\vec{j}-8\vec{k}$$

PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES

El producto mixto de tres vectores es un número que se consigue al multiplicar escalar y vectorialmente los tres vectores de la siguiente manera.
$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$para efectuar este producto resolvemos primero el producto vectorial y multiplicamos escalarmente el otro vector y el vector resultante de dicho producto vectorial.

El producto mixto también se puede resolver directamente por medio de determinantes.
Sean los vectores:

$$\vec{u} = (x, y, z);\ \vec{v} = (x', y', z');\ \vec{w} = (x'', y'', z'') \Rightarrow$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

Ej: Ej: Sea $\vec{u} = (1,2,2)$, $\vec{v} = (3,-2,1)$ y $\vec{w} = (2,0,-1)$ vamos a calcular: su producto mixto.

$$\vec{u} = (1,2,2);\ \vec{v} = (3,-2,1);\ \vec{w} = (2,0,-1) \Rightarrow$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 0 + 8 + 6 - 0 = 20$$

El producto mixto de tres vectores en valor absoluto, equivale al volumen del paralelepípedo generado por dichos vectores.