Educaguía.com

MATEMÁTICAS

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

POSICIONES RELATIVAS DE RECTAS Y PLANOS

POSICIONES DOS RECTAS

Si las rectas vienen expresadas de forma paramétrica:

$$r:\begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_1 + \lambda \cdot v_2 \\ z = z_1 + \lambda \cdot v_3 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x = x_1' + \mu \cdot w_1 \\ y = y_1' + \mu \cdot w_2 \\ z = z_1' + \mu \cdot w_3 \end{cases}$$

Formamos con los datos de estas rectas dos matrices, la normal y la ampliada que serán:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x_1' - x_1 & y_1' - y_1 & z_1' - z_1 \end{pmatrix}$$

Rango A	Rango A*	Posición de las rectas
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelas
2	2	Secantes
2	3	Cruzadas

Si las rectas vienen expresadas como dos planos que se cortan:

$$r:\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \\ A'''x + B'''y + C'''z + D''' = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

Rango A	Rango A*	Posición de las rectas
2	2	Coincidentes
2	3	Paralelas
3	3	Secantes
3	4	Cruzadas

POSICIONES DE RECTA Y PLANO

Si la expresión de la recta es: $r:\begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_1 + \lambda \cdot v_2 \\ z = z_1 + \lambda \cdot v_3 \end{cases}$ y la del plano

$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$

Y tenemos en cuenta que el vector de la recta es “v”, el punto de la recta es A y el perpendicular al plano es “n”

$\vec{v}\cdot\vec{n}$	Posición de A	Posición de recta y plano
Igual a 0	Pertenece al plano	r contenida en α
Igual a 0	No pertenece al plano	r y α Paralelos
Distinto de 0		r y α Secantes

Si la expresión es:

$$r:\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0\\ A'x+B'y+C'z+D'=0\end{cases} \qquad \alpha:\{A''x+B''y+C''z+D''=0$$

$$A=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\\ A'' & B'' & C''\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A' & B' & C' & D'\\ A'' & B'' & C''' & D''\end{pmatrix}$$

Rango A	Rango A*	Posición de recta y plano
2	2	r contenida en α
2	3	r y α Paralelos
3	3	r y α Secantes

POSICIONES DE DOS PLANOS

Si utilizamos los vectores perpendiculares a los planos y un punto perteneciente a uno de los dos planos, por ejemplo: $\vec{n}_\alpha$, $\vec{n}_\beta$ y $P(\alpha)$

$$A=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\end{pmatrix}$$

Rango A	Posición de P(α)	Posición de los planos
1	$P\in\beta$	Coincidentes
1	$P\notin\beta$	Paralelos
2		Secantes

Si utilizamos las expresiones generales de los planos,

$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$

$\beta: A'x+B'y+C'z+D'=0$

$$A=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A' & B' & C' & D'\end{pmatrix}$$

Rango A	Rango A*	Posición de los plano
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelos
2	2	Secantes

POSICIONES DE TRES PLANOS

Si la expresión de los planos es general:

$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$

$\beta : A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$\gamma : A''x + B''y + C''z + D'' = 0$

$$A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Rango A	**Rango A***	**Posición de los plano**
1	1	Coincidentes
1	2	Paralelos: • Distintos • Dos coincidentes
2	2	Secantes: • Distintos • Dos coincidentes y uno secante
2	3	Secantes: • Dos a dos • Dos paralelos y cortando el tercero
3	3	Secantes: • En un punto