



Educaguía
.com

MATEMÁTICAS

ECUACIÓN DEL PLANO

ECUACIÓN DEL PLANO

Un plano viene determinado por un punto y dos vectores, o bien tres puntos con los que se pueden formar dos vectores.

El plano tiene formas distintas de expresarse:

- Ecuación Vectorial.
- Ecuaciones Paramétricas.
- Ecuación Implícita o General.
- Ecuación del plano que pasa por Tres Puntos
- Ecuación Normal.
- Ecuación Segmentaria.

Ecuación Vectorial

Suponemos que el plano que vamos a hallar esta determinado por dos vectores directores que vamos a llamar $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, y por un punto que vamos a llamar

$$A = (x_1, y_1, z_1)$$

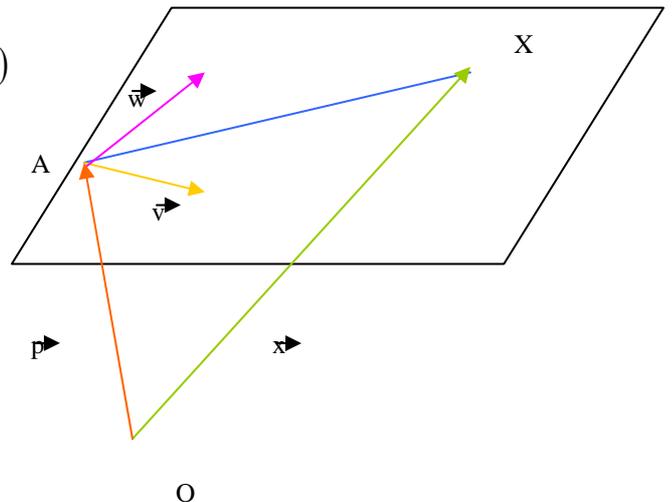
$$\vec{p} = \vec{OA} = A - O = (x_1, y_1, z_1) - (0,0,0) = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{x} = \vec{OX} = X - O = (x, y, z) - (0,0,0) = (x, y, z)$$

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \Rightarrow \text{Ec. Vectorial}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(w_1, w_2, w_3)$$

Donde \vec{p} y \vec{x} son los vectores de posición de los puntos A y X y λ y μ son parámetros (nº real) que harán que nuestros vectores sean más o menos grandes.



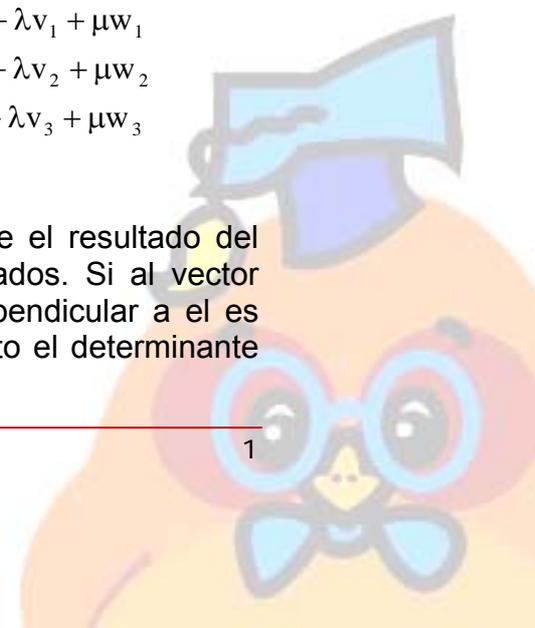
Ecuación Paramétrica

Desarrollando la ecuación vectorial, tenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(w_1, w_2, w_3) \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 + \mu w_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 + \mu w_3 \end{cases}$$

Ecuación Implícita o General

Cuando estudiamos el producto vectorial, decíamos que el resultado del producto vectorial era un vector perpendicular a los dados. Si al vector resultante de ellos lo multiplicamos por otro vector perpendicular a el es evidente que el producto escalar va a dar cero. Por tanto el determinante resultante de multiplicar \vec{AX} , \vec{v} y \vec{w} es cero.



Como consecuencia de lo anteriormente dicho tenemos:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el determinante conseguiremos: $Ax + By + Cz + D = 0$ que es la Ecuación Implícita o General

Ecuación del Plano que pasa por Tres Puntos

Como sabemos dos puntos determinan un vector, así que si en el determinante anterior sustituimos los vectores por los puntos que los generan obtendremos:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ que sería la Ecuación que pasa por Tres}$$

Puntos.

Podemos tener en cuenta que en ciertas ocasiones nos dan como dato una recta y un punto, en este caso nos fijaremos que el vector director de la recta es también perteneciente al plano, y un punto de la recta y el punto dado nos genera un vector con lo cual sería un caso particular de la expresión anterior.

Ecuación Normal

Si tenemos en cuenta que los vectores que denominamos directores nos dan como resultado otro vector que es \overrightarrow{AX} , y si a este lo multiplicamos por un vector perpendicular a él que vamos a llamar \vec{n} , el producto dará cero. Por tanto al multiplicar dichos vectores obtendremos la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ donde A, B y C son las coordenadas del vector perpendicular al plano.

Ecuación Segmentaria

Es cuando nos dan tres puntos que corten a los tres ejes, es decir:

$(x_1, 0, 0), (0, y_1, 0), (0, 0, z_1)$ sustituyendo estos puntos en la ecuación que pasa por tres puntos y después de arreglar dicha expresión resulta:

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1 \text{ que es la Ecuación segmentaria del plano.}$$

