MATEMÁTICAS

ECUACIÓN DE LA RECTA

ECUACIÓN DE LA RECTA

Una recta viene determinada por un punto y un vector, o bien dos puntos con los que se puede formar un vector (como ya sabemos).
La recta tiene formas distintas de expresarse:

- Ecuación Vectorial.
- Ecuación Paramétrica.
- Ecuación Continua.
- Ecuación que Pasa Por Dos Puntos.

Ecuación Vectorial

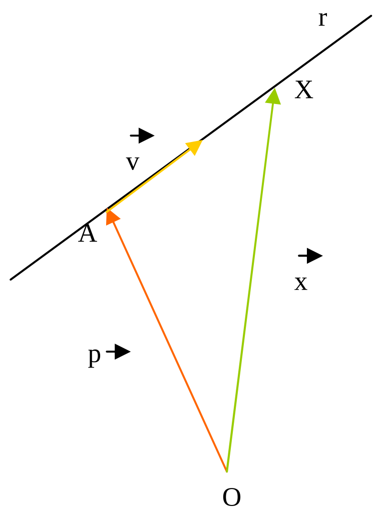
Suponemos que la recta que vamos a hallar esta determinada por un vector director que vamos a llamar $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y por un punto que vamos a llamar $A = (x_1, y_1, z_1)$

$$\vec{p} = \overrightarrow{OA} = A - O = (x_1, y_1, z_1) - (0,0,0) = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = X - O = (x, y, z) - (0,0,0) = (x, y, z)$$

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{v} \Rightarrow \text{Ec. Vectorial}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_1, v_2, v_3)$$



Donde $\vec{p}$ y $\vec{x}$ son los vectores de posición de los puntos A y X y λ es un parámetro (nº real) que hará que nuestro vector sea más o menos grande.

Ecuación Paramétrica

Desarrollando la ecuación vectorial, tenemos las ecuaciones paramétricas:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda(v_1, v_2, v_3) \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \\ z = z_1 + \lambda v_3 \end{cases}$$

Ecuación Continua

Si en las ecuaciones anteriores despejamos el parámetro λ:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{x - x_1}{v_1} \\ y = y_1 + \lambda v_2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{y - y_1}{v_2} \\ z = z_1 + \lambda v_3 \Rightarrow \lambda = \dfrac{z - z_1}{v_3} \end{cases}$$

y considerando que si los primeros miembros son iguales, los segundos también son iguales:

$$\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2}=\frac{z-z_1}{v_3}\Rightarrow \text{Ec. Continua.}$$

<u>Ecuación que Pasa por Dos Puntos</u>

Sabemos que un vector viene determinado por dos puntos por lo tanto, si consideramos que el vector $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ está determinado por el punto $A=(x_1,y_1,z_1)$ y el $B=(x_2,y_2,z_2)$ podemos deducir que:

$$(v_1,v_2,v_3)=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

Si en la ecuación continua sustituimos el vector por su valor obtendremos:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\Rightarrow$$ Ec de la recta que pasa por dos puntos.

Ej.: Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos A= (1, 2,-2) y B= (2,-3,5) de todas las formas conocidas.

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=B-A=(2,-3,5)-(1,2,-2)=(1,-5,7)$$

$$\vec{p}=\overrightarrow{OA}=A-O=(1,2,-2)-(0,0,0)=(1,2,-2)$$

$$\vec{x}=\overrightarrow{OX}=X-O=(x,y,z)-(0,0,0)=(x,y,z)$$

$$\vec{x}=\vec{p}+\lambda\cdot\vec{v}\Rightarrow \text{Ec. Vectorial}$$

$$(x,y,z)=(1,2,-2)+\lambda(1,-5,7)$$

$$(x,y,z)=(1,2,-2)+\lambda(1,-5,7)\Rightarrow\begin{cases}x=1+\lambda\cdot 1=1+\lambda\\ y=2+\lambda\cdot(-5)=2-5\lambda\\ z=-2+\lambda\cdot 7=-2+7\lambda\end{cases}$$ Ecuaciones Paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\Rightarrow\lambda=\dfrac{x-1}{1}\\ y=2-5\lambda\Rightarrow\lambda=\dfrac{y-2}{-5}\\ z=-2+7\lambda\Rightarrow\lambda=\dfrac{z+2}{7}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{7}$$ Ecuación Continua

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{-3-2}=\frac{z-(-2)}{5-(-2)}\Rightarrow\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{7}$$ Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Como se puede ver, la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, una vez operada nos queda exactamente igual que la continua; lo cual es lógico si tenemos en cuenta que un vector resulta de la diferencia de dos puntos.