Educaguía.com

MATEMÁTICAS

ÁNGULOS Y DISTANCIAS

ÁNGULOS

ANGULO DE DOS RECTAS

Si tenemos dos rectas r y s en las que el vector director es respectivamente $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$.

El ángulo que forman estas rectas sería el mismo que forman sus vectores directores, que podríamos sacar por el producto escalar de dos vectores. Es decir:

$$\cos(r,s)=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{|v_1\cdot w_1+v_2\cdot w_2+v_3\cdot w_3|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\cdot\sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2}}$$

Ej: Sean las rectas r y s siguientes, calcular el ángulo que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{1} \\ s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{v}=(3,2,1)\\ \vec{w}=(1,-2,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\cos(r,s)=\frac{|3\cdot1+2\cdot(-2)+1\cdot3|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{2}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{15}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos(r,s)=\frac{2}{15}\Rightarrow(r,s)=\arccos\frac{2}{15}=82^\circ 20'16''$$

ANGULO DE RECTA Y PLANO

Si tenemos una recta r de vector director $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y un plano α: Ax+By+Cz+D=0

El ángulo que forman el vector de la recta y el del plano (el normal) lo podríamos hacer por el producto escalar, como los ángulos entre los vectores y el ángulo entre la recta y el plano son complementarios tendríamos:

$$\cos(\vec{v},\vec{n})=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}\Rightarrow \operatorname{sen}(r,\alpha)=\cos(\vec{v},\vec{n})=\frac{|v_1\cdot A+v_2\cdot B+v_3\cdot C|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ej: Sean la recta r y el plano α siguientes, calcular el ángulo que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+2}{1} \\ \alpha: x-2y+2z-6=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{v}=(2,3,1)\\ \vec{n}=(1,-2,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \operatorname{sen}(r,\alpha)=\frac{|2\cdot1+2\cdot(-2)+1\cdot2|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=$$

$$=\frac{|2-4+2|}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{1+4+4}}=\frac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{9}}=0\Rightarrow(r,\alpha)=0$$

ANGULO DE DOS PLANOS

Sean los planos $\begin{cases} \alpha : Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (A, B, C) \\ \beta : A'x + B'y + C'z + D' = 0 \Rightarrow \vec{n}_\beta = (A', B', C') \end{cases}$

$$\cos(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} \Rightarrow \cos(\alpha, \beta) = \frac{|A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Ej: Sean los planos α y β siguientes, calcular el ángulo que forman:

$$\begin{cases} \alpha : 3x + 2y - z + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (3, 2, -1) \\ \beta : 2x - 3y + 2z - 5 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\beta = (2, -3, 2) \end{cases}$$

$$\cos(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} \Rightarrow \cos(\alpha, \beta) = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{|6 - 6 - 2|}{\sqrt{9 + 4 + 1} \cdot \sqrt{4 + 9 + 4}} =$$

$$= \frac{|-2|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{238}} \Rightarrow (\alpha, \beta) = 82^\circ 33' 4''$$

DISTANCIAS

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Si consideramos dos puntos: $P=(x_1,y_1,z_1)$ y $Q=(x_2,y_2,z_2)$ la distancia entre ellos viene determinada por la expresión:
$d(P,Q)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ Como se puede ver esta expresión es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.
Ej: Sean los puntos P y Q siguientes, calcular su distancia:

$$P=(1,3,-2) \quad y \quad Q=(-2,2,3)$$
$$d(P,Q)=\sqrt{(-2-1)^2+(2-3)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{9+1+25}=\sqrt{35}$$

DISTANCIA ENTRE PUNTO Y RECTA

La distancia de un punto P a una recta r vendrá determinada por la línea recta, que será la distancia más corta. Esta línea recta es la perpendicular trazada desde dicho punto a la recta. El punto sobre la recta donde incide la perpendicular lo vamos a llamar Q (proyección de P sobre r).
La distancia por tanto de P a r es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.
Si tenemos en cuenta los datos siguientes:
$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ $P=(x_1,y_1,z_1)$ y $A=(x_2,y_2,z_2)$ donde A es un punto de la recta.

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

Ej: Sean el punto P y la recta r siguientes, calcular su distancia:

$$\left.\begin{array}{l} P=(3,2,2) \\ r:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P=(3,2,2) \\ \vec{v}=(3,-2,1) \\ A=(-2,1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AP}=(3,2,2)-(-2,1,3)=(5,1,-1) \\ \vec{v}=(3,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$d(P,r)=\frac{\left|(5,1,-1)\times(3,-2,1)\right|}{\left|(3,-2,1)\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{\left|i-3j-10k-3k-2i-5j\right|}{\sqrt{9+4+1}}=\frac{\left|-i-8j-13k\right|}{\sqrt{14}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(-1)^2+(-8)^2+(-13)^2}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{1+64+169}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{234}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{234}{14}}=\sqrt{\frac{117}{7}}$$

DISTANCIA ENTRE PUNTO A UN PLANO

La distancia de un punto P a un plano α vendrá determinada por la línea recta, que será la distancia más corta. Esta línea recta es la perpendicular trazada desde dicho punto al plano. El punto sobre el plano donde incide la perpendicular lo vamos a llamar Q (proyección de P sobre α).
$\vec{n}=(n_1,n_2,n_3) \quad P=(x_1,y_1,z_1) \quad y \quad A=(x_2,y_2,z_2)$ donde A es un punto del plano y n el vector normal al plano.

$$d(P,\alpha)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} \Rightarrow d(P,\alpha)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ej: Sean el punto P y el plano α siguientes, calcular su distancia:

$$\left.\begin{array}{l} P=(2,-1,-1) \\ \alpha: 2x+3y-5z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P=(2,-1,-1) \\ \vec{n}=(2,3,-5) \\ A=(1,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\alpha)=\frac{|2\cdot 2+3\cdot(-1)+(-5)\cdot(-1)-5|}{\sqrt{2^2+3^2+(-5)^2}}=$$

$$=\frac{|4-3+5-5|}{\sqrt{4+9+25}}=\frac{|1|}{\sqrt{38}}=\frac{1}{\sqrt{38}}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

Supondremos un punto perteneciente a uno de los planos y hallamos la distancia de ese punto al otro plano. Con lo cual la forma de calcularlo será como en el caso anterior.

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Para poder calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan trazamos los planos que las contienen que sean paralelos entre sí, con lo cual podríamos solucionarlo como en el caso anterior.
Ej: Sean las rectas r y s siguientes, calcular su distancia

$$\left.\begin{array}{l} r: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-4}{1} \\ s: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{v}=(3,2,1) \\ \vec{w}=(1,-2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$