Educaguía.com

MATEMÁTICAS

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

Teorema: Si una función es derivable en un punto entonces la función es continua en dicho punto.
Cualquier función derivable es continua, sin embargo cualquier función continua no tiene que ser necesariamente derivable.
Teorema: Si una función es continua en un intervalo abierto, y en dicho intervalo tiene un punto máximo o un mínimo, entonces su derivada es nula.

TEOREMA DE ROLLE

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a,b], es derivable en el intervalo abierto (a,b) y f(a) es igual a f(b) entonces existe un punto interior "c" que cumple que f'(c)=0
Ej: Comprobar que la función $f(x)=x^2-8x+16$ cumple el Teorema de Rolle en el intervalo [1,7]. Y en caso de que lo cumpla, calcular el punto donde se anula la derivada
Dado que es un polinomio la función es continua en el intervalo cerrado y derivable en el intervalo abierto.

$$f(1)=1^2-8\cdot 1+16=9$$

$$f(7)=7^2-8\cdot 7+16=9$$

$$f'(x)=2x-8 \Rightarrow f'(c)=2c-8=0 \Rightarrow c=4\in \left]1,7\right[$$

TEOREMA DE LAGRANGE O DEL VALOR MEDIO

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a,b], y es derivable en el intervalo abierto (a,b) entonces existe, al menos, un punto c que cumple que:

$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$ Esta expresión se llama de los incrementos finitos.

Ej: Hallar el valor aproximado de $\sqrt{180}$. Para poder hacerlo, suponemos la función: $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow$ Para poder aplicar el teorema, necesitamos un intervalo. Por eso utilizamos el cuadrado perfecto más próximo, que en este caso sería 169, es decir que nuestro intervalo va a ser [169,180]. Por tanto:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a) \Rightarrow f(b)=f(a)+f'(c)\cdot(b-a)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{180}=\sqrt{169}+\frac{1}{2\sqrt{169}}\cdot(180-169) \Rightarrow \sqrt{180}=13+\frac{1}{2\cdot 13}\cdot 11 \Rightarrow$$

$$\sqrt{180}=13+\frac{11}{26}=13{,}423$$

Esto sería si tomamos c=169, con esto obtendríamos un valor aproximado por exceso.

TEOREMA DE CAUCHY

Sean dos funciones f y g continuas en un intervalo cerrado [a,b] y derivables en el intervalo abierto (a,b) y además g(a) $\neq$ g(b) y g'(x)$\neq 0$ entonces existe un punto perteneciente al intervalo abierto (a,b) que cumple:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Ej: Comprobar si se cumple el teorema de Cauchy el las funciones

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+2x^2-5x+3 \\ g(x)=2x^2+6x+4 \end{array}\right\}$$ en el intervalo [-1, 5]

Condiciones:
$$\begin{cases} f(x)\text{ y } g(x)\Rightarrow \text{Continuas en } [-1,5] \\ f(x)\text{ y } g(x)\Rightarrow \text{Derivables en }]-1,5[\\ \left.\begin{array}{l} g(-1)=2(-1)^2+6(-1)+4=2-6+4=0 \\ g(5)=2.5^2+6.5+4=50+30+4=84 \end{array}\right\}\Rightarrow g(-1)\neq g(5) \\ g'(x)=4x+6\Rightarrow 4x+6=0\Rightarrow x=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}\notin\,]-1,5[\end{cases}$$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$