MATEMÁTICAS

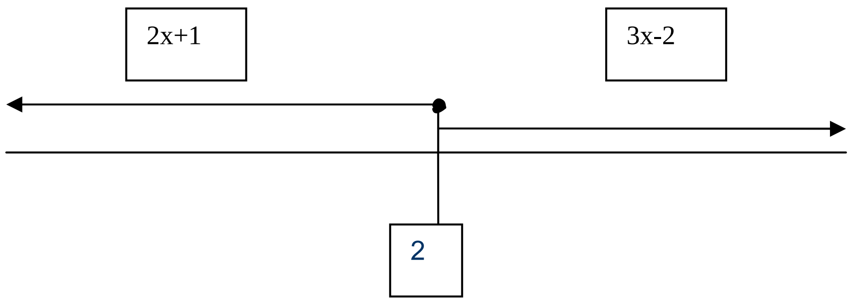
LÍMITES LATERALES CONTINUIDAD

LÍMITES LATERALES CONTINUIDAD

LIMITES LATERALES

En el cálculo de límites, hay ocasiones, en las que la función a tratar no es la misma para todos los valores de existencia de dicha función. En esos casos debemos de decidir que función tenemos que utilizar. Para eso utilizamos los límites laterales. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si\ \ x \le 2 \\ 3x-2 & si\ \ x\rangle 2 \end{cases}$$



Cuando vayamos a resolver el límite cuando tienda a 2, debemos de elegir cual de las dos funciones utilizamos. Pues bien, ante este problema, utilizamos los llamados límites laterales, es decir, límites cuando x tiende a 2 por la derecha (es decir, para valores mayores que 2), y límites cuando x tiende a 2 por la izquierda (es decir, para valores menores que 2).

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x-2) = 3.2 - 2 = 6 - 2 = 4$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x+1) = 2.2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

CONTINUIDAD

Una función se considera continua cuando cumple:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5 & si \quad x \le 3 \\ x-2 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Para comprobar la continuidad hacemos los límites laterales y la función en el punto.

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(2x-5) = 2.3-5 = 6-5 = 1$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(x-2) = 3-2 = 1$$

$$f(3) = 2.3-5 = 6-5 = 1$$

Como el límite por la derecha es igual al límite por la izquierda e igual a la función en el punto, consideramos que la función es **continua** en el punto x=3.

Hay dos tipos fundamentales de discontinuidad:

- No evitable:
  - De salto finito: Cuando los límites laterales son distintos pero tienen un valor real.
  - De salto infinito: Cuando los límites laterales son distintos, pero al menos uno de ellos toma un valor +∞ o -∞

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \ x \le 2 \\ 3x-1 & si \ x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(x+2\right) = 2+2 = 4$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(3x-1\right) = 3.2-1 = 6-1 = 5$$

$$Salto \quad \left|5-4\right| = 1$$

Como se puede ver los límites laterales son distintos entre sí, pero son números reales con lo cual la función sería **discontinua de salto finito**. En donde el salto sería el valor absoluto de la diferencia de los límites

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & si\ x\leq 3\\ \dfrac{x+1}{2x-6} & si\ x>3\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(3x+2)=3.3+2=9+2=11$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x+1}{2x-6}=\frac{3+1}{2.3-6}=\frac{4}{0}=+\infty$$

Como se puede ver los límites laterales son distintos entre sí, pero uno de los valores no es un número real, con lo cual la función sería **discontinua de salto infinito**.

- Evitable

  - De primera especie: Cuando los límites por la derecha y la izquierda son iguales pero distintos de la función en el punto.
  - De segunda especie: Cuando los límites son una indeterminación y al eliminarla se consigue que tome un valor.

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & si\ x<1\\ 3x-2 & si\ x=1\\ 2x & si\ x>1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1)=1+1=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}(2x)=2.1=2$$

$$f(1)=3.1-2=1$$

En este caso los límites laterales son iguales pero distintos de la función en el punto, con lo cual la función sería **discontinua evitable de primera especie.**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & si\ x\neq -2\\ 3x-2 & si\ x=-2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to -2^-}\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim_{x\to -2^-}(x-2)=-2-2=-4$$