MATEMÁTICAS

APLICACIÓN DE DERIVADAS

APLICACIÓN DE DERIVADAS

Las aplicaciones fundamentales de las derivadas son:

- Para la representación gráfica de funciones.
- Para optimización.

Para la representación gráfica de funciones utilizamos derivadas en varios apartados, para conseguir un mejor entendimiento vamos a representar una función con todos sus apartados, es decir incluyendo los que no pertenecen al apartado de derivadas.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

$$f(x)=\frac{x^3}{2x^2-2}$$

1.- **Dominio**

En una función cociente el dominio será para todos los valores reales excepto aquellos que anulen el denominador.

$$2x^2-2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1} \Rightarrow x=\pm 1$$

$$\text{Dom.}\forall x\in R-\{\pm 1\}$$

2.- **Simetrías**

Para comprobar las simetrías de una función se sustituye la “x” de la misma por (-x).

Si la función permanece constante, la simetría sería respecto al eje Y, es decir, par.

Si la función cambia de signo, la simetría sería respecto al origen, es decir, impar.

Si la función no cumple las dos condiciones anteriores no existe simetría.

$$f(x)=\frac{x^3}{2x^2-2}\cdots\cdots\cdots\cdots f(-x)=\frac{(-x)^3}{2(-x)^2-2}=\frac{-x^3}{2x^2-2}=-\frac{x^3}{2x^2-2}=-f(x)$$

La función cambia de signo. Por tanto es simétrica respecto al origen.

3.- **Puntos de corte**

Para calcular los puntos de corte debemos de cumplir dos condiciones:

- Si corta al eje X, la y=0
- Si corta al eje Y, la x=0

$$\text{Si}\quad x=0 \Rightarrow y=\frac{0^3}{2.0^2-2}=\frac{0}{0-2}=0 \Rightarrow \text{Punto de corte }(0,0)$$

$$\text{Si}\quad y=0 \Rightarrow 0=\frac{x^3}{2x^2-2} \Rightarrow 0=x^3 \Rightarrow x=0 \Rightarrow \text{Punto de corte }(0,0)$$

En este caso el punto coincide, por tanto hay un único punto de corte que es el (0,0).

4.- **Crecimientos y Decrecimientos (Monotonía)**

Para comprobar si una función es creciente o decreciente se siguen los siguientes pasos:

- Se hace la derivada primera de la función.
- Se iguala la derivada a cero, y se sacan los valores que anularon la derivada primera.
- Se hacen intervalos con los valores que anularon la derivada primera. Teniendo cuidado de excluir de estos intervalos los valores que no pertenecen al campo de existencia de la función, es decir, los valores que no pertenecen al dominio.
- Se sustituye en la derivada primera un valor perteneciente a cada uno de los intervalos. Si:

$$\begin{cases} f'(x) \prec 0 \Rightarrow Función \quad decreciente. \\ f'(x) \succ 0 \Rightarrow Función \quad creciente \end{cases}.$$

$$y=\frac{x^3}{2x^2-2}\Rightarrow y'=\frac{3x^2.(2x^2-2)-4x.(x^3)}{(2x^2-2)^2}=\frac{6x^4-6x^2-4x^4}{(2x^2-2)^2}=\frac{2x^4-6x^2}{(2x^2-2)^2}$$

$$\frac{2x^4-6x^2}{(2x^2-2)^2}=0\Rightarrow 2x^4-6x^2=0\Rightarrow x^2(2x^2-6)=0\Rightarrow\begin{cases} x^2=0\Rightarrow x=0 \\ 2x^2-6=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$$

Intervalos:

$$\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\Rightarrow y'(-2)=\frac{2(-2)^4-6(-2)^2}{\left[2(-2)^2-2\right]^2}=\frac{32-24}{(8-2)^2}=\frac{8}{36}\Rightarrow\frac{+}{+}\succ 0\Rightarrow \text{Creciente}$$

$$(-\sqrt{3},0)\Rightarrow\begin{cases}(-\sqrt{3},-1)\Rightarrow y'\left(-\frac{2}{3}\right)=\dfrac{2\left(-\frac{2}{3}\right)^4-6\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{\left[2\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\right]^2}\Rightarrow\frac{-}{+}\prec 0\Rightarrow \text{Decreciente} \\ (-1,0)\Rightarrow y'\left(-\frac{1}{2}\right)=\dfrac{2\left(-\frac{1}{2}\right)^4-6\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\right]^2}\Rightarrow\frac{-}{+}\prec 0\Rightarrow \text{Decreciente}\end{cases}$$

$$\left(0,\sqrt{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}(0,1)\Rightarrow y'\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)^4-6\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\right]^2}=\frac{-}{+}\prec 0\Rightarrow \text{Decreciente} \\ (1,\sqrt{3})\Rightarrow y'\left(\frac{3}{2}\right)=\dfrac{2\left(\frac{3}{2}\right)^4-6\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\left[2\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\right]^2}=\frac{-}{+}\prec 0\Rightarrow \text{Decreciente}\end{cases}$$

$$\left(\sqrt{3},+\infty\right)\Rightarrow y'(2)=\frac{2(2)^4-6(2)^2}{\left[2(2)^2-2\right]^2}=\frac{+}{+}\succ 0\Rightarrow \text{Creciente}$$

5.- **Puntos Críticos (Máximos Y Mínimos)**

Para calcular los puntos críticos tenemos que coger los puntos que nos anularon la derivada primera y sustituirlos en la derivada segunda.

$$\text{Si}\begin{cases} y'' \prec 0 \Rightarrow \text{Máximo} \\ y'' \succ 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ y'' = 0 \Rightarrow \text{Posible punto de inf lexión} \end{cases}$$

$$y' = \frac{2x^4 - 6x^2}{\left(2x^2 - 2\right)^2} \Rightarrow y'' = \frac{\left(8x^3 - 12x\right)\cdot\left(2x^2 - 2\right)^2 - 2\left(2x^2 - 2\right)\cdot 4x\cdot\left(2x^4 - 6x^2\right)}{\left(2x^2 - 2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(8x^3 - 12x\right)\cdot\left(2x^2 - 2\right) - 2\cdot 4x\cdot\left(2x^4 - 6x^2\right)}{\left(2x^2 - 2\right)^3} = \frac{16x^5 - 13x^3 - 24x^3 + 24x - 16x^5 + 48x^3}{\left(2x^2 - 2\right)^3} =$$

$$= \frac{11x^3 + 24x}{\left(2x^2 - 2\right)^3}$$

Sustituimos los valores que anularon la derivada primera:

$$y''\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{11\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^3 + 24\cdot\left(-\sqrt{3}\right)}{\left[2\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 2\right]^3} = \frac{-}{+} \prec 0 \Rightarrow \text{Máximo en el punto } \left(-\sqrt{3}, f\left(-\sqrt{3}\right)\right) \Rightarrow M\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$y''(0) = \frac{11\cdot 0^3 + 24\cdot 0}{\left(2\cdot 0^2 - 2\right)^3} = \frac{0}{-8} = 0 \Rightarrow \text{Posible punto de inf lexión}$$

$$y''\left(\sqrt{3}\right) = \frac{11\cdot\left(\sqrt{3}\right)^3 + 24\left(\sqrt{3}\right)}{\left[2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\right]^3} = \frac{+}{+} \succ 0 \Rightarrow \text{Mínimo en el punto } \left(\sqrt{3}, f\left(\sqrt{3}\right)\right) \Rightarrow m\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

6.- **Curvatura (Concavidad y Convexidad)**

Para comprobar si una función es cóncava o convexa se siguen los siguientes pasos:

- Se hace la derivada segunda de la función.
- Se iguala la esta derivada a cero, y se sacan los valores que anularon la derivada segunda.
- Se hacen intervalos con los valores que anularon la derivada segunda. Teniendo cuidado de excluir de estos intervalos los valores que no pertenecen al campo de existencia de la función, es decir, los valores que no pertenecen al dominio.
- Se sustituye en la derivada segunda un valor perteneciente a cada uno de los intervalos. Si:

$$\begin{cases} f''(x) \prec 0 \Rightarrow \textit{Función} \quad \textit{Cóncava.} \\ f''(x) \succ 0 \Rightarrow \textit{Función} \quad \textit{Convexa.} \end{cases}$$

$$y'' = \frac{11x^3+24x}{\left(2x^2-2\right)^3} \Rightarrow \frac{11x^3+24x}{\left(2x^2-2\right)^3} = 0 \Rightarrow 11x^3+24x=0 \Rightarrow x\cdot\left(11x^2+24\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 11x^2+24=0 \Rightarrow \nexists. \end{cases}$$

$$(-\infty,0) \Rightarrow \begin{cases} (-\infty,-1) \Rightarrow y''(-2) = \dfrac{11\cdot(-2)^3+24\cdot(-2)}{\left[2\cdot(-2)^2-2\right]^3} = \dfrac{-}{+} \prec 0 \Rightarrow \text{Cóncava} \\ (-1,0) \Rightarrow y''\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3+24\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{\left[2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-2\right]^3} = \dfrac{-}{-} \succ 0 \Rightarrow \text{Convexa} \end{cases}$$

$$(0,+\infty) \Rightarrow \begin{cases} (0,1) \Rightarrow y''\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{11\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+24\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\left[2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\right]^3} = \dfrac{+}{-} \prec 0 \Rightarrow \text{Cóncava} \\ (1,+\infty) \Rightarrow y''(2) = \dfrac{11\cdot 2^3+24\cdot 2}{\left[2\cdot 2^2-2\right]^3} = \dfrac{+}{+} \succ 0 \Rightarrow \text{Convexa} \end{cases}$$

7.- **Puntos de Inflexión**

Para calcular los puntos de inflexión tenemos que coger los puntos que nos anularon la derivada segunda y sustituirlos en la derivada tercera.

Si $\begin{cases} y''' \neq 0 \Rightarrow \text{Punto de Inflexión} \\ y''' = 0 \Rightarrow \nexists \text{ Punto de Inflexión} \end{cases}$

8.-**Asíntotas**

Hay tres tipos de asíntotas:

Horizontales: Se calculan haciendo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \Rightarrow \text{Asíntota en } y=a$$

Verticales: Se calculan haciendo:

$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \text{Asíntota en } x=a$ En donde "a" son los puntos donde la función no existe.

Oblicuas: Las asíntotas oblicuas son rectas, y como tales tienen la apariencia y=mx+n. Para calcular esta asíntota hay que calcular "m" y "n".

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$
$$n = \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-m\cdot x\right]$$

En nuestro caso particular las asíntotas son:

Horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^2-2} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{x} - \frac{2}{x^3}} = \frac{1}{0-0} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \nexists \text{ Asíntota en y}$$

Verticales:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{2x^2-2} = \frac{(-1)^3}{2(-1)^2-2} = \frac{-1}{2-2} = \infty \Rightarrow \text{Asíntota en } x = -1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{2x^2-2} = \frac{(1)^3}{2(1)^2-2} = \frac{1}{2-2} = \infty \Rightarrow \text{Asíntota en } x = 1$$

Como se puede ver ponemos en el límite ∞, sin tener en consideración el signo. Para tenerlo en consideración deberíamos hacer los límites laterales en el 1, y en el -1. De todas formas independientemente del signo, si da como resultado ∞, hay asíntota en ese punto.

Oblicuas: y=mx+n

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{2x^2-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x\cdot(2x^2-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^3-2x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - m\cdot x] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2x^2-2} - \frac{1}{2}\cdot x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x^2-1)}{2x^2-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{2x^2-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2x^2-2} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow 0$$

$$\text{Asíntota}: y = \frac{1}{2}\cdot x + 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

Tenemos que tener en cuenta que:
Si existe asíntota horizontal, no existe asíntota oblicua. Pero si no existe asíntota horizontal no implica que tenga que haber asíntota oblicua.

Representación Gráfica