MATEMÁTICAS

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Este tema trata de discutir y resolver un sistema de ecuaciones lineales con un número cualquiera de incógnitas.

Un sistema puede ser de tres clases:

- Compatible determinado: Tiene una única solución.
- Compatible indeterminado: Tiene infinitas soluciones.
- Incompatible: No tiene solución.

Para solucionar los sistemas vamos a utilizar, la notación matricial. Para ello llamaremos matriz del sistema a la formada por los coeficientes de las incógnitas del sistema (M); y matriz ampliada (M*) a la formada por los coeficientes y los términos independientes.

TEOREMA DE ROUCHE

El teorema de Rouche se basa en la utilización del rango de las matrices del sistema y de la ampliada y compararlas si:

- R(M) = R(M*) = nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (S.C.D.)
- R(M) = R(M*) $\neq$ nº incógnitas $\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.)
- R(M) $\neq$R(M*) $\Rightarrow$ Sistema Incompatible (S.I.)

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Ahora calculamos los rangos de las matrices del sistema y ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3+12+6-3-12-6=0 \Rightarrow Rango \neq 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4=-3\neq 0 \Rightarrow Rango(M)=2$$

Ahora tendríamos que calcular el rango de la matriz ampliada como en este caso la columna de los términos independientes coincide con la de la incógnita z, el determinante nos quedaría exactamente igual, por tanto el rango de la matriz ampliada será igual que el rango de la del sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+ay-z=1 \\ 2x+y-az=2 \\ x-y-z=a-1 \end{array}\right\} \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -1-a^2+2+1+2a-a=-a^2+a+2 \Rightarrow a^2-a-2=0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+3}{2}=2 \\ \dfrac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$

$Si \quad a=2 \Rightarrow R(M)=2$

$$M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) Como \quad la \quad columna \quad 4^{a}\ y\ 3^{a}\ son \quad iguales \Rightarrow R(M^*)=2$$

$R(M)=R(M^*)\neq n^{o}\ incógnitas \Rightarrow S.C.I.$

$Si \quad a=-1 \Rightarrow R(M)=2$

$$M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2-2-2-1-4+2=-9\neq 0 \Rightarrow R(M^*)=3$$

$R(M)\neq R(M^*) \Rightarrow S.I.$

$Si \quad a\neq -1 \wedge a\neq 2 \Rightarrow R(M)=R(M^*)=n^{o}\ incógnitas \Rightarrow S.C.D.$

Ejemplo: Discutir la compatibilidad del sistema según los valores del parámetro:

RESOLUCIÓN POR GAUSS

Para solucionar un sistema de ecuaciones lineales por Gauss, tenemos que triangular la matriz, de forma que nos quede en todos los elementos de la diagonal principal hacia abajo todos los elementos con cero.

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=9 \\ x-y-z=1 \\ x-y+z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & -2 & 2 & -12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=9 \\ -2y \quad =-8 \\ 2z=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+4-(-2)=9 \Rightarrow x=9-4-2 \Rightarrow x=1 \\ y=\dfrac{-8}{-2}=4 \\ z=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

Aunque en este caso podríamos haber solucionado el sistema en la segunda equivalencia porque cambiando en orden de las líneas ya estaría triangulada, para poder calcular los valores de las incógnitas, sin embargo, seguiremos haciendo como debería ser en un sistema cualquiera.

Cuando discutimos un sistema por el método de Gauss según como nos quede la ecuación más sencilla sabremos si es Compatible o Incompatible.

Si queda: nº.z=nº el sistema es C.D.
Si queda: 0.z=0 el sistema es C.I.
Si queda: 0.z=nº El sistema es I.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay-z=1 \\ 2x+y-az=2 \\ x-y-z=a-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & -1 & -1 & a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1-2a & 2-a & 0 \\ 0 & -1-a & 0 & a-2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(-1-a)\cdot y = (a-2) \Rightarrow Discusión \begin{cases} -1-a=0 \Rightarrow a=-1 \\ a-2=0 \Rightarrow a=2 \end{cases}$$

$$Si \quad a=-1 \Rightarrow 0\cdot y=-3 \Rightarrow S.I.$$

$$Si \quad a=2 \Rightarrow -3\cdot y=0 \Rightarrow S.C.D.$$

$$Si \quad a\neq -1 \wedge a\neq 2 \Rightarrow S.C.D.$$

<u>RESOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE CRAMER</u>

Este método es aplicable sí y solo sí el sistema es de igual número de ecuaciones y de incógnitas, y además su determinante es distinto de cero.

Haremos una resolución de un sistema por este método para que quede claro su procedimiento.

Ej:

$$\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$$

Para resolver este sistema vamos a hacer un cociente de dos determinantes, en el numerador tendremos un determinante específico para cada incógnita, esto consistirá:

- Si quiero calcular la incógnita x, en la columna de las x pondremos la de los términos independientes.
- Si quiero calcular la incógnita y, en la columna de las y pondremos la de los términos independientes.
- Si quiero calcular la incógnita z, en la columna de las z pondremos la de los términos independientes.

En el denominador siempre pondremos el determinante de los coeficientes de las incógnitas.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}11 & 1 & 1\\ 5 & -1 & 1\\ 24 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{11.(-1).1+1.1.24+5.2.1-1.(-1).24-1.5.1-1.2.11}{1.(-1).1+1.1.3+2.2.1-1.(-1).3-1.2.1-1.2.1}=\frac{-11+24+10+24-5-22}{-1+3+4+3-2-2}=\frac{20}{5}=4$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 11 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 3 & 24 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1.5.1+11.1.3+2.24.1-1.5.3-11.2.1-1.24.1}{5}=\frac{5+33+48-15-22-24}{5}=\frac{25}{5}=5$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 11\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 2 & 24\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1.(-1).24+1.5.3+2.2.11-11.(-1).3-1.2.24-1.5.2}{5}=\frac{-24+15+44+33-48-10}{5}=\frac{10}{5}=2$$