Educaguía.com

MATEMÁTICAS

Matrices

1

MATRICES

Es la ordenación de elementos en filas y columnas de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene “m” filas y “n” columnas llamándose al número de filas y columnas dimensión y designándose dicha dimensión mxn.
Cualquier elemento de la matriz se designa con dos subíndices por Ej: a_{76} esto indica que estoy en la fila 7, columna 6.

MATRICES IGUALES

Cuando los elementos que ocupan el mismo lugar en las dos matrices son iguales.

MATRIZ FILA

La que tiene una sola fila.

MATRIZ COLUMNA

La que tiene una sola columna.

MATRIZ CUADRADA

La que tiene igual número de filas que de columnas.

DIAGONAL PRINCIPAL Y DIAGONAL SECUNDARIA

Se considera diagonal principal los elementos de la matriz colocados en la posición marcada por la línea en la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se considera diagonal secundaria los elementos de la matriz colocados en la posición marcada por la línea en la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRASPUESTA

Dada una matriz A se llama matriz traspuesta de A y se representa por A^t, a la matriz que resulta de cambiar las filas por columnas.
Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

MATRIZ SIMÉTRICA

Es aquella que tiene los elementos de la diagonal principal hacia arriba y hacia abajo iguales.
Ej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ANTISIMÉTRICA

La que tiene los elementos de la diagonal principal hacia arriba y hacia abajo iguales y con el signo cambiado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 2 & 4 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ NULA

La que tiene todos los elementos con cero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

Es aquella en la que todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son nulos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ ESCALAR

Es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal principal iguales

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDENTIDAD

Es una matriz escalar con todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR

Es una matriz cuadrada en la que todos los términos por encima o por debajo de la diagonal principal son nulos.

Triangular superior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

SUMA DE MATRICES

Para poder sumar o restar matrices tienen que tener la misma dimensión. Para sumar o restar se suman o restan los elementos que están situados en la misma posición.
Ej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 4+2 & 5+1 \\ -1+2 & 2+3 & 3+(-5) \\ 2+5 & 6+4 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \\ 7 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) & 4-2 & 5-1 \\ -1-2 & 2-3 & 3-(-5) \\ 2-5 & 6-4 & -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & 8 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE UN NÚMERO REAL POR UNA MATRIZ

Se multiplica el número real por todos los elementos de la matriz.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 15 \\ 3 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES

La condición para que se pueda hacer un producto de dos matrices AxB es que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda, el resultado tendrá el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda.

A = m x n B = n x r

Condición

Solución

Como se puede ver, la forma de multiplicar matrices es:

$$\begin{pmatrix} primera\ \ fila\ x\ \ primera\ columna & primera\ \ fila\ x\ segunda\ columna & primera\ \ fila\ x\ tercera\ columna \\ segunda\ \ fila\ x\ \ primera\ columna & segunda\ \ fila\ x\ segunda\ columna & segunda\ \ fila\ x\ tercera\ columna \\ tercera\ \ fila\ x\ \ primera\ columna & tercera\ \ fila\ x\ segunda\ columna & tercera\ \ fila\ x\ tercera\ columna \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$Ejemplo:$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3 & 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5 & 1\cdot 5+2\cdot 6+3\cdot 7 \\ 4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 3 & 4\cdot 3+5\cdot 4+6\cdot 5 & 4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7 \\ 7\cdot 1+8\cdot 2+9\cdot 3 & 7\cdot 3+8\cdot 4+9\cdot 5 & 7\cdot 5+8\cdot 6+9\cdot 7 \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSIBLE

Una matriz se considera que tiene inversa o que es inversible, si cumple, que el producto de ella por su inversa es la matriz unidad.

RANGO DE UNA MATRIZ

El rango o característica de una matriz es el número de filas linealmente independientes.

Para saber si las filas son linealmente independientes o no, se hace Gauss, igual que hacemos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Vamos a ver un ejemplo. Calculamos el rango de la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para operar dejamos la primera fila fija y sacamos ceros en la primera columna:

- $(-5)F_1 + F_2$
- $(-9)F_1 + F_3$
- $(-13)F_1 + F_4$

Una vez sacados ceros en la primera columna, dejamos fija la segunda fila y sacamos ceros en la segunda columna.

- $(-2)F_2 + F_3$
- $(-3)F_2 + F_4$

En otra circunstancia, una vez sacados ceros en la segunda columna, dejaríamos fija la tercera fila y sacaríamos ceros en la tercera columna, y así sucesivamente hasta llegar a intentar triangular la matriz, es decir, sacar ceros en todos los elementos que estén situados en la parte inferior de la diagonal principal.
En este caso hay dos líneas que son linealmente independientes, por lo tanto el rango de la matriz es 2.