FÍSICA

CINEMÁTICA

1

CINEMÁTICA

Desplazamiento: Δx .- Es la variación de la posición de una partícula determinada por dos instantes determinados.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Velocidad media: Vm.- Es el cociente entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo.

$$Vm = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Velocidad instantánea: V(t).- Es la velocidad que adquiere la partícula en un instante determinado. La velocidad instantánea equivale a la pendiente de su curva en ese instante.

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Aceleración media: am.- Es la variación de la velocidad con respecto al tiempo.

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea: a.- Es la aceleración que adquiere la partícula en un instante determinado.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Vector de posición: $\vec{r}$.- Cuando queremos determinar la posición de un punto P respecto de un sistema de referencia utilizamos un vector $\vec{r}$ que tendrá su origen en el origen de coordenadas y su extremo en el punto P. Como es lógico, ese punto P tendrá de coordenadas respecto de los tres ejes $P(P_x,P_y,P_z)$ así que el vector de posición también tendrá tres coordenadas que serán $r(r_x,r_y,r_z)$, si estas coordenadas las expresamos respecto a los vectores unitarios tendremos:

$$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} \Rightarrow |r| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$

Si consideramos a (r_x,r_y,r_z) como todas las posibles posiciones de un movimiento tendremos que estas van variando respecto del tiempo y conseguiremos que

$$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

que es la ecuación del movimiento.
Aplicando esta condición a todas las definiciones anteriores, tendremos:

Velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Velocidad instantánea

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)}{dt} \Rightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

Aceleración media

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2\left(x\vec{i} + y\,j + z\vec{k}\right)}{dt^2} \Rightarrow \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Componentes intrínsecas de la aceleración

El vector aceleración instantánea es la suma vectorial de las aceleraciones tangencial y normal (o centrípeta).

La aceleración tangencial nos indica la variación del módulo de la velocidad en la unidad de tiempo.

La aceleración normal o centrípeta es la variación de la dirección del vector velocidad en el tiempo.

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Rightarrow a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_t = \dfrac{d\left|\vec{v}\right|}{dt} \cdot \vec{u} \\ \vec{a}_n = \left|\vec{v}\right| \cdot \dfrac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow a_n = \dfrac{v^2}{r} \end{cases}$$

donde r es el radio de curvatura de la trayectoria en ese punto.

EJEMPLO:

Supongamos que nos dan el vector de posición de un móvil $\vec{r} = 2t^3\,\vec{i} - 4t\,\vec{j} + 5\,\vec{k}$, vamos a calcular:

1. El vector velocidad
2. El vector aceleración
3. La aceleración tangencial
4. La aceleración normal
5. La aceleración media entre los instantes t=2s, t=4s

1. $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 6t^2\,\vec{i} - 4\,\vec{j} \quad \dfrac{m}{s}$

2. $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 12t\,\vec{i} \quad \dfrac{m}{s^2}$

3.

$$\vec{a}_t = \frac{d\left|\vec{v}\right|}{dt} \Rightarrow |v| = \sqrt{\left(6t^2\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36t^4 + 16} \Rightarrow a_t = \frac{d\left(\sqrt{36t^4+16}\right)}{dt} = \frac{144t^3}{2\cdot\sqrt{36t^4+16}} =$$

$$= \frac{72t^3}{\sqrt{36t^4+16}}$$

4.

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n^2 = a^2 - a_t^2 \Rightarrow a_n^2 = (12t)^2 - \left(\frac{72t^3}{\sqrt{36t^4+16}}\right)^2 = 144t^2 - \frac{5184t^6}{36t^4+16} =$$

$$\frac{5184t^6 + 2304t^2 - 5185t^6}{36t^4+16} = \frac{2304t^2}{36t^4+16}$$

5.

$$a_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \Rightarrow v_1 = 6\cdot 2^2 - 4 = 20 \\ t_2 = 4 \Rightarrow v_2 = 6\cdot 4^2 - 4 = 92 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{92-20}{4-2} = \frac{72}{2} = 36 \quad \frac{m}{s^2}$$